

MANCHAS SOLARES E A LEI DE NEWCOMB-BENFORD

Mauro A. Alves¹

Cássia S. Lyra²

Resumo. Este trabalho descreve uma atividade extracurricular na qual a lei dos primeiros dígitos de Newcomb-Benford (LNB) é introduzida a estudantes através do estudo de manchas solares. A LNB estabelece que os primeiros dígitos de vários tipos de conjunto de dados de ocorrência natural não são distribuídos de maneira uniforme, mas sim de acordo com uma distribuição logarítmica de probabilidade. A LNB é contra-intuitiva e é um ótimo exemplo de como a matemática aplicada ao estudo de fenômenos naturais pode fornecer resultados surpreendentes e inesperados, servindo também como um agente motivador no ensino de ciências e matemática.

Palavras-chave: Ensino de astronomia. Atividade extracurricular. Manchas solares. Lei de Newcomb-Benford.

MANCHAS SOLARES Y LA LEY DE NEWCOMB-BENFORD

Resumen. En este trabajo se describe una actividad extracurricular donde se presenta a los estudiantes la ley de los primeros dígitos de Newcomb-Benford (LNB) con el estudio de manchas solares. La LNB establece que los primeros dígitos de algunos tipos de datos de ocurrencia natural no están distribuidos en manera uniforme, pero sí de acuerdo con una distribución logarítmica de probabilidad. La LNB es contra-intuitiva y es un excelente ejemplo de como las matemáticas aplicadas al estudio de fenómenos naturales pueden sorprender al estudiante, sirviendo también como elemento motivador en la educación de ciencias y de matemáticas.

Palabras clave: Enseñaza de astronomia. Actividad extracurricular. Manchas solares. Ley de Newcomb-Benford.

SUNSPOTS AND THE NEWCOMB-BENFORD LAW

Abstract. The Newcomb-Benford's Law (LNB) of first digits is introduced to high school students in an extracurricular activity through the study of sunspots. The LNB establishes that the first digits of various sets of data describing natural occurrences are not distributed uniformly, but according to a logarithmic distribution of probability. The LNB is counter-intuitive and is a good example of how mathematics applied to the study of natural phenomena can provide surprising and unexpected results serving also as a motivating agent in the study of physical sciences.

Keywords: Teaching of astronomy. Extracurricular activity. Sunspots. Newcomb-Benford's Law.

¹ Instituto de Aeronáutica e Espaço, São José dos Campos, SP. E-mail: mauro@sepn.org

² Infinite Technical, São José dos Campos, SP.

1 Introdução

Uma grande preocupação de todo educador é o grau de motivação do aluno dentro da sala de aula. É comum para o educador passar pela situação na qual a maior parte dos alunos demonstra falta de interesse pelo dia-a-dia escolar. Para evitar este tipo de situação, é recomendável o uso de atividades extracurriculares que sirvam para motivar os estudantes. Neste trabalho são descritos resultados de um exercício proposto como atividade extracurricular a uma classe de terceiro ano (34 alunos) de uma escola técnica de ensino médio. Este exercício teve como objetivo simular a atividade de pesquisa científica, e consistiu no aprendizado de uma interessante lei matemática relacionada à distribuição de dígitos em grandezas físicas, coleta de dados científicos sobre manchas solares, e na interpretação dos resultados obtidos. Como se trata de uma atividade extracurricular, os temas abordados nesta atividade não fazem parte do dia-a-dia de uma escola de ensino médio, ainda que técnica. Pensando nisto, houve um período de preparo no qual aos estudantes foram apresentados os conceitos necessários para a execução bem sucedida da atividade. Devido às características da atividade, neste artigo são descritos brevemente os conceitos estudados, as estratégias utilizadas para o preparo dos alunos, e os resultados obtidos.

2 Tópicos abordados

Percebe-se na grande maioria dos casos que estudantes têm a noção de que ciência é uma atividade linear na qual se sabe com antecedência onde a pesquisa poderá nos levar. Um dos objetivos desta atividade foi o de mostrar aos alunos que assuntos aparentemente não relacionados podem, às vezes, ser estudados em conjunto, e que resultados interessantes podem ser obtidos deste tipo de análise. Para ilustrar este conceito, nesta atividade os alunos se dedicaram a pesquisar a Lei de Newcomb-Benford e manchas solares. Abaixo, é apresentada uma revisão breve destes dois tópicos, na qual estão descritas os principais conceitos utilizados nesta atividade.

2.1 Lei de Newcomb-Benford

A lei dos primeiros dígitos de Newcomb-Benford (LNB) foi relatada pela primeira vez pelo astrônomo Simon Newcomb em 1881 (LIVIO, 2002). Newcomb observou em uma biblioteca que as páginas iniciais de livros contendo tábuas de logaritmos eram as mais sujas devido ao manuseio, e que elas eram mais limpas ao se avançar no livro, indicando que os logaritmos de números que iniciavam com os dígitos 1 e 2 eram os mais procurados pelos usuários da biblioteca. Newcomb concluiu que os primeiros dígitos de números que representam vários tipos de grandezas não são distribuídos de maneira uniforme. No entanto, a propriedade descoberta por Newcomb passou despercebida até que Frank Benford a redescobriu em 1937 de maneira aparentemente independente, e também através da observação das páginas de tábuas de logaritmos (BENFORD, 1938). Benford, porém, testou a lei em 20 conjuntos de dados de origens diversas, tais como estatísticas de baseball, drenagem de rios, massas atômicas e até mesmo em números aparecendo em páginas de revistas. A LNB estabelece que para um conjunto grande de dados relacionados a uma ocorrência natural, e expressos de maneira decimal, os primeiros dígitos que representam esta ocorrência não estão distribuídos de maneira uniforme, mas seguem uma distribuição logarítmica de

probabilidades, ou seja, a probabilidade P de que um número selecionado aleatoriamente de um conjunto de dados inicie com o dígito D é dada por

$$P(D) = \log_{10}[(1 + 1/D)], \quad D = 1, 2, \dots, 9. \quad (1)$$

Para que um conjunto de dados analisados siga a LNB, os seguintes critérios devem ser obedecidos (DEAKE; NIGRINI, 2000):

Os números devem descrever a dimensão de uma grandeza como, por exemplo, a população de cidades, o comprimento de rios, etc.;

O conjunto de dados deve ser livre de limites artificiais pré-estabelecidos como, por exemplo, o valor mínimo de renda anual a partir do qual é feita uma declaração de imposto de renda;

A amostra de dados deve ser grande o suficiente para que as frequências previstas tenham oportunidade de aparecer; e

A amostra não deve ser composta por números puramente aleatórios, pois, neste caso, dígitos entre 0 e 9 têm a mesma probabilidade de ocorrer em qualquer posição de um número.

Note que nem todos os conjuntos de dados necessariamente seguem a LNB. Por exemplo, códigos de endereçamento postal ou os números de telefones em uma lista telefônica não obedecem a LNB porque estes números são ordenados de acordo com uma seqüência pré-determinada.

Uma propriedade interessante da LNB é o fato dela não depender do sistema de numeração. A LNB pode ser aplicada a qualquer outro sistema de base b , sendo expressa por (BUCK et al., 1993):

$$P(D) = \log_b[(1 + 1/D)], \quad 1 \leq D \leq (b - 1) \quad (2)$$

A LNB é também independente da escala, ou do sistema de unidades utilizado (PINKHAM, 1961). Mais ainda, a LNB pode ser generalizada para representar qualquer dígito de um número decimal (HILL, 1988).

Por algum tempo, a LNB não passou de uma curiosidade matemática, mas aos poucos começaram a surgir aplicações para esta lei. Por exemplo, ela pode ser utilizada para verificar a autenticidade de dados financeiros (DURSTCHI et al., 2004; NYE; MOUL, 2008) e no desenvolvimento de computadores mais eficientes (KNUTH, 1981). Uma interessante explicação da validade da LNB cita o fato de que ela é válida para conjuntos de dados não-negativos caracterizados por distribuições log-normais, algo comum para uma grande quantidade de variáveis de ocorrência natural (SCOTT; FASLI, 2001).

2.2 Manchas solares

Manchas solares são depressões na fotosfera solar. Elas são mais frias (4000-4500 K) que as áreas que as circundam (5800 K), e apresentam atividade magnética cerca de 1000 vezes maior que a atividade normal da superfície solar. As manchas solares são produzidas por campos magnéticos toroidais que se formam abaixo da fotosfera e que irrompem à superfície por empuxo magnético. O número de manchas solares varia de

maneira irregular ao longo de um ciclo de aproximadamente 11 anos. As manchas solares estão relacionadas a outros fenômenos que ocorrem na superfície solar, por isso a presença, o tamanho e o número delas podem ser usados como indicadores do nível da atividade solar (ZIRIN, 1988). A Figura 1 mostra um grupo de manchas solares; nesta figura observa-se que uma mancha solar apresenta duas regiões distintas, uma mais escura e central chamada umbra, e outra periférica e mais clara chamada penumbra.

Os primeiros relatos de observações de manchas solares foram feitos por astrônomos chineses em 27 a.C. O astrônomo Thomas Harriot foi o primeiro a observá-las por um telescópio em 1610. Galileu Galilei em 1612 as explicou como sendo estruturas relacionadas à superfície solar. Observações diárias de manchas solares foram iniciadas em 1749 pelo Observatório de Zurique (BRODY, 2003). A idéia de usar um índice para indicar o número de manchas presentes na superfície solar surgiu em 1849 com Johann Rudolf Wolf. O método de Wolf, ainda em uso, consiste em contar o número de manchas presentes na superfície solar e o número de grupos aos quais as manchas pertencem. O número de Wolf, R_w , é calculado através da seguinte fórmula (ZIRIN, 1988):

$$R_w = k(10g + s) \quad (3)$$

onde g é o número de grupos de manchas, e s é o número de manchas solares visíveis na superfície do Sol. O fator k (usualmente menor que 1) é uma constante de normalização que varia com a localização, a instrumentação utilizada nas observações, e com a experiência do observador. A combinação do número de manchas e grupos é usada para compensar variações nas observações de manchas muito pequenas. O valor de R_w é determinado diariamente, sem referência aos dias prévios. R_w é um índice que serve como indicador da atividade do disco visível do Sol. Apesar da natureza aparentemente arbitrária desta fórmula, ela se correlaciona muito bem com outros tipos de medidas que caracterizam a atividade solar (ZIRIN, 1988).

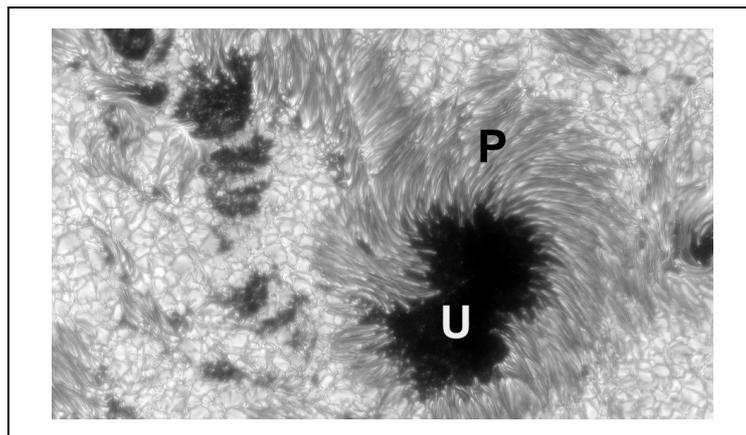


Figura 1. Imagem de um grupo de manchas solares obtidas em 487,7 nm. A imagem tem uma largura aproximada de 50.000 km. A umbra (U) e a penumbra (P) estão indicadas (G. Scharmer e M. Löfdahl, Instituto de Física Solar, Real Academia de Ciências da Suécia).

Uma análise detalhada (HOYT; SCHATTEN, 1998) das séries de R_w indicou que durante certos períodos o valor de R_w estava superestimado, e que talvez fosse necessária a criação de um novo índice para indicar o nível de atividade solar. Para isso,

o Número de Manchas Solares de Grupo, R_G , foi criado em 1998 (HOYT; SCHATTEN, 1998). Com o uso de R_G , pretendia-se criar um índice indicador da atividade da superfície solar que fosse independente de observações de manchas solares muito pequenas e com menor ruído experimental que R_W . O valor de R_G é calculado apenas considerando o número de grupos de manchas, e foi normalizado para concordar com R_W entre os anos de 1874 e 1976, período no qual o Observatório Real de Greenwich fornecia relatórios diários a respeito do número e características dos grupos de manchas solares. O Número de Manchas Solares de grupo é dado por

$$R_G = \frac{12,08}{N} \sum_{i=1}^N k_i g_i \quad (4)$$

onde N é o número de observadores, k_i é o fator de correção para o observador i , e g_i é o número de manchas solares observado pelo observador i . O valor de 12,08 é o fator de normalização utilizado para tornar R_G e R_W concordantes durante o período mencionado acima. Existem valores calculados de R_G para os anos de 1610 a 1995.

Como mencionado acima, as manchas solares são áreas de intensa atividade magnética, portanto a área da superfície solar coberta por manchas também poder ser usada como indicador da atividade solar. A monitoração contínua da área total das manchas solares se iniciou em 1874 no Observatório de Greenwich e continua sendo feita até hoje por outros observatórios (WILSON; HATHAWAY, 2006).

Na Figura 2 são mostradas a variação do valor médio mensal de R_W , e valor médio mensal da área total da superfície solar coberta por manchas solares para os anos de 1890 a 1982. Nota-se nesta figura que existe um alto grau de correlação entre as duas séries.

As séries de dados mostradas na Figura 2 e outras utilizadas neste estudo foram obtidas do Solar Influences Data Center, Bélgica, <http://sidc.oma.be>, e do National Geophysical Data Center, E.U.A., <http://www.ngdc.noaa.gov>. O período de 1890 a 1982 foi escolhido por ser um intervalo no qual existem dados diários simultâneos para as quatro séries utilizadas neste estudo.

3 Estratégias utilizadas para o preparo dos alunos

Para suprir a falta de familiaridade dos alunos com os conceitos utilizados nesta atividade, foram desenvolvidas atividades preparatórias nas quais foram desenvolvidos os conceitos necessários para o completo entendimento e aproveitamento dos assuntos pesquisados. A seguir descrevemos como os alunos foram preparados.

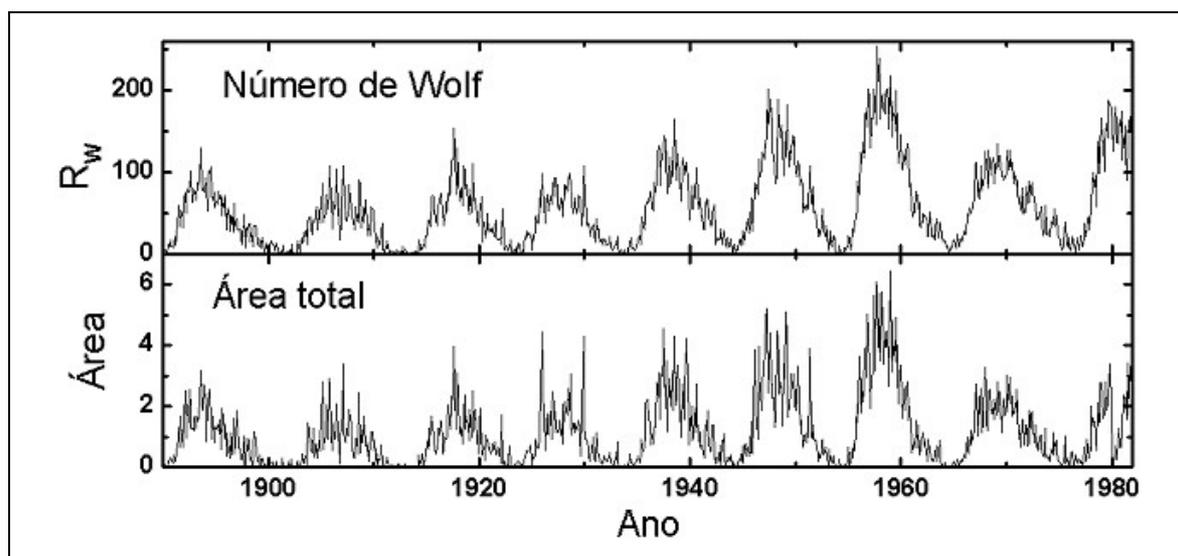


Figura 2. Valores médios mensais de R_w e da área do disco solar coberta por manchas solares entre os anos de 1890 e 1982. Os valores de área são expressos em milésimos da superfície visível do Sol.

3.1 Observação de Manchas Solares

Durante o período em que esta atividade foi desenvolvida o Sol passava por um período no qual manchas solares eram facilmente visíveis em sua superfície. Para estimular o interesse e demonstrar que manchas solares podem ser observadas mesmo com recursos mínimos, foram realizadas as seguintes tarefas (depois, é claro, de serem explicados os perigos e cuidados necessários que devem ser tomados ao se observar o Sol):

Observação visual de manchas solares através de filtros solares (filtro de soldador no. 14 e filtros solares Baader®);

Observação telescópica de manchas solares. Para isto foi utilizado um telescópio portátil (tipo Maksutov, 90 mm de abertura, distância focal de 1280 mm) e um filtro solar Baader®. As imagens das manchas solares foram observadas com magnificação de 60X e 100X;

Acompanhamento do ciclo solar através da internet.

Antes de mais nada, julgamos importante salientar que as tarefas (a) e (b) *sempre* foram realizadas sob supervisão direta do professor ou responsável direto pelos alunos.

As tarefas (a) e (b) ocorriam normalmente durante o intervalo das aulas no pátio do colégio. Através das observações visuais e telescópicas os alunos tomaram ciência da relativa facilidade em se observar manchas solares, do tamanho relativo das manchas, da divisão das manchas em uma região escura (umbra) e outra menos escura (penumbra) e da existência de grupos de manchas solares.

A tarefa (c) consistiu na coleta de imagens do Sol para comparação com as observações e para demonstrar o ciclo de variabilidade das manchas solares. Dois websites foram consultados para este fim: www.spaceweather.com (Space Weather), e www.bbso.njit.edu (Big Bear Solar Observatory). Estes websites possuem imagens arquivadas e atualizadas diariamente do disco solar. Alguns alunos com conhecimento

de softwares para a manipulação de imagens foram capazes de realizar cálculos aproximados das dimensões das áreas das manchas solares, umbras e penumbras.

Detalhes sobre a origem das manchas solares e noções básicas de física solar foram apresentados aos alunos em uma aula de formato tradicional normal enriquecida com projeção de imagens e filmes de curta duração. Essas tarefas foram realizadas ao longo de 5 semanas. Essa duração foi escolhida em função do período de rotação do Sol (cerca de 25 dias, no equador), para permitir que todos os alunos tivessem acesso às observações pelo telescópio, e também para observar alguns dos aspectos da formação e evolução de manchas solares.

3.2 Verificação da Lei de Newcom-Benford

Apesar da aparente complexidade da LNB, ela pode ser comprovada facilmente usando uma das abordagens seguida por Benford (1938). Para isto, os alunos foram instruídos a coletar de revistas, jornais e artigos eletrônicos números correspondentes a indicadores econômicos, índices geográficos e estatísticos, etc., de acordo com os critérios descritos acima na seção 2.1. Para a coleta de dados, os alunos foram divididos em grupos de tal forma que não ocorresse repetição de números coletados. A coleta de dados foi realizada fora do período escolar e durou cerca de duas semanas. Os primeiros dígitos dos números assim obtidos (cerca de 3600 valores) foram separados e ordenados em um histograma. Os alunos puderam constatar que o histograma obtido estava em boa concordância com a distribuição (1).

3.3 Estatística Básica

Esta atividade foi aplicada a alunos de uma escola técnica que possuíam conhecimentos básicos de estatística e eram capazes de descrever e entender conceitos estatísticos como média e desvio-padrão. Como será visto mais abaixo, o teste do qui-quadrado foi utilizado na comparação de séries de valores numéricos obtidas da análise de dados para verificar se existia uma associação significativa entre elas. Para explicar a importância deste teste, foi usado um artifício no qual um paralelo foi estabelecido entre a determinação do desvio padrão de uma grandeza (que representa a dispersão de valores desta grandeza) e o valor de qui-quadrado obtido durante a análise das séries de dados. Fazendo isto, os alunos foram capazes de compreender que assim como o desvio-padrão é um indicador da “qualidade” de certa medida, o valor de qui-quadrado pode ser visto também como um indicador de “qualidade” quando duas séries de dados são comparadas entre si. Um período equivalente a duas aulas foi usado nesta etapa. Calculadoras com funções estatísticas e computadores com planilha eletrônica foram utilizados nestas aulas.

4 Resultados

Os alunos aplicaram a LNB no estudo de números que descrevem séries de dados diários de R_W , R_G , área total, e área da umbra de manchas solares. A aplicação da LNB neste caso partiu da hipótese de que o ciclo de atividade solar, assim como outros fenômenos naturais, segue a LNB.

Para testar esta hipótese, foram utilizadas quatro séries de dados (R_W , R_G , área total, e área da umbra das manchas solares) compostas de 32.734 dados cada uma. Para a análise dos dados, os alunos utilizaram computadores com planilhas eletrônicas.

4.1 Análise de dados

Obviamente, valores nulos de R_G , R_W e de área foram removidos da análise. Uma inspeção visual preliminar das séries utilizadas mostra que, de fato, os dígitos iniciais de R_G e R_W e os que representam a área total e a área da umbra das manchas solares não estão distribuídos uniformemente entre 1 e 9, indicando que estas séries poderiam ser usadas para testar se o ciclo de atividade solar e a LNB estão relacionados.

A comparação dos resultados entre R_G e R_W é interessante porque estes dois índices buscam descrever o mesmo tipo de fenômeno, ou seja, o aparecimento de manchas na superfície solar, sendo, porém, calculados de maneira diferente. A área da mancha solar é uma medida física; a comparação de resultados da área total e área da umbra pode mostrar algum desvio observacional, uma vez que a umbra, por ser um objeto de maior contraste, tem a sua área medida mais facilmente. Na Figura 3 são comparadas a distribuição da frequência da ocorrência dos primeiros dígitos das séries de R_W e R_G , e dos valores de área com os valores obtidos pela LNB (1). Note que os valores de R_W tradicionalmente não possuem barras de erros, e por isso erros observacionais não são considerados nesta análise.

Curiosamente, os resultados mostrados na Figura 3 indicam que, de maneira geral, parece existir uma tendência para que os primeiros dígitos dos valores de R_W e R_G e os das áreas estejam de acordo com o que é previsto pela LNB. Existem diferenças, e talvez elas possam ser explicadas pelo fato de que um número relativamente pequeno de ciclos solares foi considerado nesta análise e, além disso, os valores de R_W e R_G e os das áreas têm associados a eles um alto grau de ruído observacional. Note que não estamos afirmando que as séries de dados usados neste estudo *devem* seguir a LNB. A LNB não é uma lei de aplicação universal; existem vários fenômenos que não a obedecem (NYE; e MOUL, 2008), mas os resultados mostram que os primeiros dígitos das séries de dados relacionados à atividade solar seguem uma distribuição similar à LNB.

O teste do qui-quadrado foi usado para verificar a qualidade da ocorrência dos primeiros dígitos obtidos das séries de R_W , R_G e áreas. O valor de qui-quadrado é calculado por

$$\chi^2 = \sum_{n=1}^9 \frac{(\log(1 + 1/n) - \text{Freq}(D_n))^2}{\log(1 + 1/n)} \times S, \quad (5)$$

onde S denota o tamanho da série de dados (valores diferentes de zero), $\text{Freq}(D_n)$ é a frequência encontrada para o dígito D_n . O valor crítico para 8 graus de liberdade ao nível de significância de 5% é 15.51. Na Tabela 1 estão listados os valores de qui-quadrado encontrados para as séries diárias de valores de R_W , R_G , área total e área da umbra.

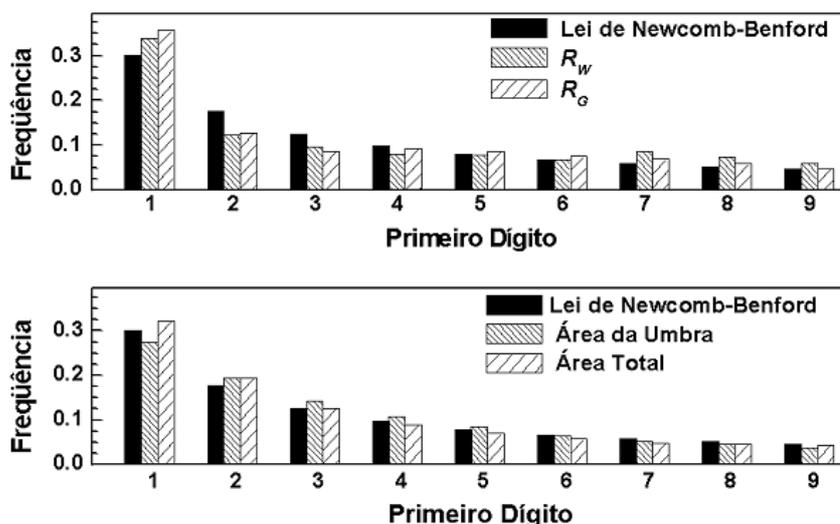


Figura 3. Frequências de ocorrência dos primeiros dígitos das séries de valores diários de R_W e R_G (acima), e da área total e área da umbra de manchas solares (abaixo) entre os anos de 1890 e 1982.

De acordo com o teste de hipótese nula, as séries seriam rejeitadas, pois os valores de qui-quadrado são maiores que 15,51. Uma crítica que pode ser feita aos resultados do teste de qui-quadrado é que, como se sabe, quando uma quantidade muito grande de dados é usada, este teste sempre detectará diferenças; neste caso, o resultado do teste de qui-quadrado pode ser um critério muito estrito. Além disso, séries diárias de dados das características da superfície solar possuem um ruído observacional muito grande, e isto pode ser a causa dos valores elevados de qui-quadrado. No entanto, observa-se que as séries de áreas possuem um valor menor de qui-quadrado, indicando que medidas físicas, ao invés de contagens podem ser mais úteis no estudo da atividade solar à luz da LNB.

Série de dados	χ^2
R_W	1095
R_G	909
Área total	195
Área da umbra	282

Tabela 1. Valores de qui-quadrado para as séries diárias de R_W , R_G , área total e área da umbra.

5 Conclusão

O objetivo principal deste estudo foi levar para a sala de aula problemas não relacionados diretamente ao currículo regular dos cursos de física e matemática de estudantes de nível médio de uma escola técnica. Para isto, o estudo da LNB e o ciclo de manchas solares foram combinados em uma atividade extracurricular, a qual foi executada com relativa facilidade e com bastante entusiasmo pelos alunos. Através de pesquisa bibliográfica pela internet foi possível a coleta de todo o tipo de informação

necessária para a realização desta atividade. Conceitos mais importantes e de difícil compreensão foram explicados em sala de aula. Durante a atividade, os alunos foram expostos a fatos importantes e interessantes ligados à variabilidade solar, história da astronomia, conceitos básicos de estatística, e a LNB e sua aplicação em atividades tão diversas como ciências atuárias e astrofísica. A LNB, devido às suas características contra-intuitivas, mostrou ser um bom agente motivador. Outro fator positivo deste estudo foi encontrar resultados de certa forma não conclusivos, pois isto serviu para tornar a discussão sobre a possibilidade de se aplicar a LNB ao ciclo solar ainda mais interessante. Nesta situação, ao invés de aceitar um fato, o estudante teve que estabelecer conjecturas e hipóteses para validar ou não os resultados encontrados, e decidir se de fato o ciclo de atividade solar pode ser descrito através da LNB.

Mais do que constatar a veracidade de uma hipótese, essa atividade extracurricular foi realizada em caráter experimental para verificar o nível de envolvimento e o grau de interesse dos alunos por assuntos relacionados à ciência. Ela também foi utilizada para avaliar o grau amadurecimento intelectual destes estudantes. Os alunos participaram da atividade de maneira voluntária, não houve a preocupação nem a necessidade em se atribuir nota ou conceito ao trabalho realizado pela classe.

Através da observação do comportamento da classe como um todo, podemos mencionar que foi observado o alto grau de familiaridade dos alunos com a internet e com a capacidade de acesso à informação. Mais ainda, muitos dos alunos mostraram um nível de proficiência bastante elevado com vários softwares, sendo capazes de avançar na pesquisa proposta e produzir resultados quase de maneira independente. O desempenho observado dos alunos durante esta atividade sugere que novas abordagens podem (e talvez devam) ser seguidas para tornar mais interessante o aprendizado.

Referências

- BENFORD, F. The law of anomalous numbers. **Proceedings of the American Philosophical Society**, v. 78, p. 551, 1938.
- BRODY, J. **The enigma of sunspots: a story of discovery and scientific revolution**. London: Floris Books, 2003. 168 p.
- BUCK, B.; MERCHANT, A.; PEREZ, S. An illustration of Benford's first digit law using alpha decay half lives. **European Journal of Physics**, v. 14, p. 59, 1993.
- DEAKE, P. D.; NIGRINI, M. J. Computer assisted analytical procedures using Benford's law. **Journal of Accounting Education**, v. 18, p.127, 2000.
- DURSTCHI, C.; HILLISON, W.; PACINI, C. The effective use of Benford's law to assist in detecting fraud in accounting data. **Journal of Forensic Accounting**, v. 5, p. 1524, 2004.
- HILL, T. P. The first digit phenomenon. **The American Scientist**, v. 10, p. 354, 1988.
- HOYT, D. V.; SCHATTEEN, K. H. Group Sunspot Numbers: A New Solar Activity Reconstruction. **Solar Physics**, v. 179, p.189, 1998.

KNUTH, D. E. **The Art of Computer Programming**: Seminumerical algorithms, v. 2. Reading: Addison-Wesley, 1981. 565 p.

LIVIO, M. **The Golden Ratio**. New York : Broadway Books, 2002. 294 p.

NYE, J. ; MOUL, C. The Political Economy of Numbers: on the application of Benford's Law to International Macroeconomic Statistics, **The B.E. Journal of Macroeconomics**, v.7: n. 1, 2007. Disponível em: <<http://www.bepress.com/bejm/vol7/iss1/art17>>. Acesso em: 01 fev. 2008.

PINKHAM, R. S. On the distribution of first significant digits. **Annals of Mathematical Statistics**, v. 32, p.1223, 1961.

SCOTT, P. D.; FASLI, M. Benford's Law: an empirical investigation and a novel explanation. **CSM Technical Report 349**, 2001. 21 p. Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.1.9527&rep=rep1&type=pdf>>. Acesso em: 01 fev.2008.

WILSON, R. M.; HATHAWAY, D. H. **On the Relation Between Sunspot Area and Sunspot Number**, NASA/TP—2006—214324, 2006. 13 p.

ZIRIN, H. **Astrophysics of the sun**. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. 448 p.